Le Théorème de Seifert-van Kampen

Soit X un esp. et $A, B \subset X$ ouvert t.q. $X = A \cup B$ et $C = A \cap B$ est connexe par arcs. Pour $x \in C$, comment calculer $\pi_1(X, x)$ à partir des π_1 de A, B et C ?

Dans {esp. pointés}

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & X \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} \pi_1(C) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(B) \arrow[d] \\ \pi_1(A) \arrow[r] & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

Le thm de SvK dit, que π_1 préserve les pushouts :

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(A) *_{\pi_1(C)} \pi_1(B)$$

<u>Thm 4.1 (Seifert-van Kampen)</u> : Soit $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ où $A_\alpha \subset X$ ouvert et connex, $x_0 \in \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha \neq \emptyset$.
Alors il existe un homom. naturel $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$ qui est surj. si $A_\alpha \cap A_\beta$ est connexe $\forall \alpha, \beta \in J$.
Si en plus $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ est connexe $\forall \alpha, \beta, \gamma \in J$, alors le noyau de Φ est engendré par $i_{\alpha\beta *}(\omega) i_{\beta\alpha *}(\omega)^{-1}$ $\forall \alpha, \beta \in J, \omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$

<u>Rmk</u> : Construction de $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$:
L'inclusion $i_\alpha : A_\alpha \hookrightarrow X$ induit $i_{\alpha *} : \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$. Par la propriété univ. du produit libre on obtient

$$\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \to \pi_1(X)$$
$$[f_{\alpha_1}] \cdot [f_{\alpha_2}] \cdots [f_{\alpha_k}] \mapsto i_{\alpha_1 *}[f_{\alpha_1}] \cdots i_{\alpha_k *}[f_{\alpha_k}]$$

- $$\begin{tikzcd} \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \arrow[r, "i_{\beta\alpha *}"] \arrow[d, "i_{\alpha\beta *}"] & \pi_1(A_\beta) \arrow[d] \\ \pi_1(A_\alpha) \arrow[r] & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

Donc clairement $i_{\alpha\beta *}(\omega) i_{\beta\alpha *}(\omega)^{-1} \in \ker(\Phi)$

- Si $X = A \cup B$ et $A \cap B$ est connexe, alors 4.1 implique
$$\pi_1(X) \cong \pi_1(A) *_{\pi_1(A\cap B)} \pi_1(B)$$

<u>Exple:</u> On a vu que $S^n = D^n \cup_{S^{n-1}} D^n$

$N \cap S \simeq S^{n-1}$

Pour $n \geq 2$, S^{n-1} est connexe $\overset{\text{thm}}{\Rightarrow}$ $\pi_1(S^n) \cong \pi_1(D^n) *_{\pi_1(S^{n-1})} \pi_1(D^n)$
$$\cong \{1\} *_{\pi_1(S^{n-1})} \{1\} = \{1\}$$

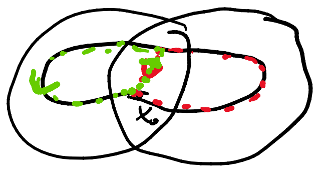
Pour $n=1$ le thm ne s'applique pas!

4.2 La preuve du thm 4.1

On va ignorer les inclusions i_α, $i_{\alpha\beta}$ etc. donc pour $[f] \in \pi_1(A_\alpha)$ on va aussi écrire $[f] \in \pi_1(X)$ au lieu de $i_{\alpha *}[f]$...

<u>Lemme 4.2</u>: Φ est surjective. Plus précisement, $\forall [f] \in \pi_1(X)$ $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in J$ et $f_i \in \pi_1(A_{\alpha_i})$ t.q. $[f] = [f_1] \cdots [f_k] \in \pi_1(X)$

<u>pf</u>: Comme f est continue, on peut trouver $\forall t \in I$ un interval ouvert $t \in I_t \subset I$ t.q. $f(\overline{I_t}) \subset A_\alpha$ pour un $\alpha \in J$.



$\overset{I \text{ cpct}}{\Longrightarrow}$ Un nombre fini des I_t recouvrent $I \Rightarrow \exists\ 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = 1$ t.q. $f([s_i, s_{i+1}]) \subset A_{\alpha_i}$.

Soit $g_i = f|_{[s_i, s_{i+1}]}$. Alors $f \simeq g_1 * \dots * g_k$ (conc. des chemins). Pour obtenir des boucles on choisi $h_i : I \to A_{\alpha_i} \cap A_{\alpha_{i+1}}$ (connexe par hypot.) t.q. $h_i(0) = x_0$, $h_i(1) = f(s_i)$.

$\rightsquigarrow f \simeq \underbrace{g_1 * h_1^{-1}}_{=f_1} * \underbrace{h_1 g_2 h_2^{-1}}_{=f_2} \cdots \underbrace{h_{k-1} * g_k}_{=: f_k}$ $\square$

... N = Sous-groupe norm. engendré par $i_{\alpha\beta_*}(\omega) \cdot i_{\beta\alpha_*}(\omega)^{-1}$

$=:t_1$ $=:t_2$ $=:t_k$

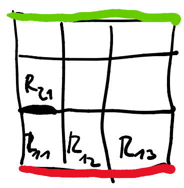
Soit enfin N = Sous-groupe norm. engendré par $i_{\alpha\beta_1}(\omega)\cdot i_{\beta\alpha_1}(\omega)^{-1}$ $\forall \alpha,\beta\in J$, $\omega\in\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta)$. On a vu $N\subset \mathrm{Ker}(\Phi)$. Pour montrer $\mathrm{Ker}\,\Phi\subset N$ on considère $[f_1]\cdots[f_k]\in\mathrm{Ker}(\Phi)\subset *\pi_1(A_\alpha)$ t.q. $f_i\in\pi_1(A_{\alpha_i})$.

Si $f=f_1\cdot\ldots f_k$, alors $[f]=1\in\pi_1(X) \Rightarrow \exists F: I\times I\to X$ homot. de f à c_{x_0}

Comme dans la preuve de 4.2 $\exists$ décomp. de $I\times I$ en rectangles R_{ij}

t.q. • $F(R_{ij})\subset A_{\alpha_{ij}} =: A_{ij}$

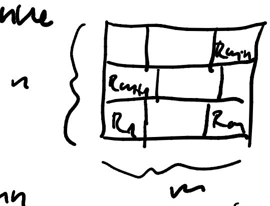
• $R_{1j}=A_{\alpha_j}$ et $\left[F|_{R_{1j}\cap I\times\{0\}}\right]=\underset{\pi_1(A_{\alpha_j})}{[f_j]}$



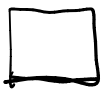
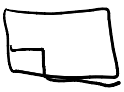
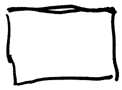
$F|_{\text{—}} = c_{x_0}$

$F|_{\text{—}} = f$

En plus on peut perturber les lignes intérieur t.q. chaque $(t,s)\in I\times I$ est contenu dans au plus 3 rectangles.



On numérote les rectangles $R_1, R_2, \ldots R_{mn}$ du bas-gauche vers le haut-droite et on définit $\gamma_r: I\to I\times I$ comme le chemin qui sépare $R_1,\ldots,R_r$ des autre rectangls:

γ_0:  γ_1:  … γ_{mn}: 

Chaque γ_r commence sur $\{0\}\times I$ et termine sur $\{1\}\times I \rightsquigarrow \gamma_r(0)=\gamma_r(1)=x_0$

Comme $\gamma_0\simeq\gamma_1\simeq\ldots\simeq\gamma_r$ aussi $f=F\circ\gamma_0\simeq F\circ\gamma_1\simeq\ldots\simeq F\circ\gamma_{m\cdot n}\simeq c_x$

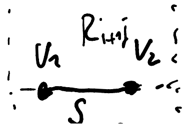
Pour chaque coin $v\in I\times I$ d'un rectangle $\exists$ au plus 3 ouvert t.q. $F(v)\in A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}\cap A_{\alpha_3} \rightsquigarrow g_v: I\to X$ t.q. $g_v(0)=x_0$ et $g_v(1)=F(v)$

Ainsi on obtient pour chaque $F\circ\gamma_r$ un élément de $\mathrm{Ker}(\Phi)$

$$(*) = [f_1^r]\cdots[f_{k_r}^r] \quad \text{avec } [f_i^r]\in\pi_1(A_{\alpha_i^r})$$

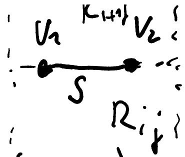
en ajoutant $g_v^{-1}g_v$ chaque fois que $F\circ\gamma_r$ passe par un coin d'un rectangle.

(*) n'est pas unique: pour chaque segment S



rectangle.

Le mot (*) n'est pas unique : pour chaque segment S



il faut choisir si on considère $g_{v_2}^{-1} F|_S * g_{v_1} \in \pi_1(R_{ij})$ ou $\pi_1(R_{i+1,j})$.

Mais deux choix donnent le même élément dans $*\pi_1(A_\alpha)/N$ par déf. de N.

En plus $F\circ\gamma_r$ et $F\circ\gamma_{r+1}$ diffèrent par une homot. dans R_{r+1} et donc les deux donnent le même mot si on choisit R_{r+1} pour tous les segments de $F\circ\gamma_r$ et $F\circ\gamma_{r+1}$ dans R_{r+1}.

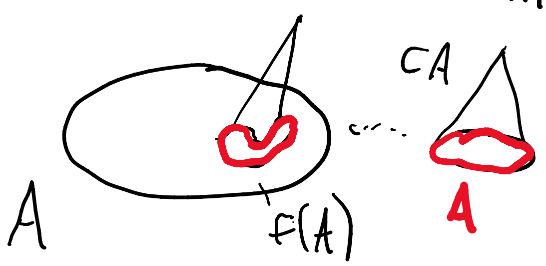
$$\leadsto [f_1]\cdots[f_k] = [f_1^0]\cdots[f_{k_0}^0] = [f_1^1]\cdots[f_{k_1}^1] = \dots = [f_1^{mn}]\cdots[f_{k_{mn}}^{mn}] = 1\cdots 1 = 1 \in *\pi_1(A_\alpha)/N$$

$$\leadsto [f_1]\cdots[f_k] \in N \leadsto \ker(\phi) = N \quad \square$$

4.3 Attachement d'une cellule :

Prop 4.3 : Soient (X, x_0) et (A, a_0) deux esp. pointés avec A connexe. Soit $f : A \to X$ pointée et $Y = X \cup_f CA$.

Alors $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) *_{\pi_1(A, a_0)} \{1\}$



Def / Rappels : • Un sous-esp. $i : A \hookrightarrow X$ est un rétracte s'il existe $r : X \to A$ t.q. $r \circ i = id_A$

($\Rightarrow i_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ est injective et $r_* : \pi_1(X) \to \pi_1(A)$ surj.)

• $i : A \hookrightarrow X$ est un rétracte de déformation de X s'il existe $r : X \to A$ t.q. $r \circ i = id_A$ et $i \circ r \simeq id_X$

$r : X \to A$ t.q. $r \circ i = id_A$ et $i \circ r = id_X$

(On peut pas conclure que $\pi_1(A) \cong \pi_1(X)$ car l'homot. de $i \circ r$ vers id_X n'est pas forcément pointée.)

- $i : A \hookrightarrow X$ est un rétracte de déformation fort de X si $r \circ i = id_A$ et $i \circ r$ est homot. à id_X par une homot. fixant A, i.e. $H : X \times I \to X$ t.q. $H(x,0) = i \circ r(x)$, $H(x,1) = x$ et $H(a,t) = a \ \forall t \in I$.

Dans ce cas on a $\pi_1(A, a_0) = \pi_1(X, i(a_0))$.

Exple: $X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I$ est un rétracte de déf. fort.

pf de 4.3: $U = X \cup_f A \times [0, \frac{1}{2})$, $V = A \times (\frac{1}{4}, 1] / A \times \{1\} \subset CA$.

Alors $Y = U \cup V$, U et V sont ouvert car leurs préimages dans $X \sqcup CA$ le sont, et $U \cap V = A \times (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \simeq A$.

En plus $V \simeq pt.$ et $U \simeq X$, tous avec des homot. pointées.

$\overset{4.1}{\leadsto} \pi_1(Y) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) = \pi_1(X) *_{\pi_1(A)} \{1\}$

car
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] & U \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook] & U \cap V \arrow[u] \end{tikzcd}$$
commute, et donc $\pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U)$ correspond à $f_* : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ $\square$

Attachements des cellules standards:

Soit $Y = X \cup_f e^n$ où $e^n \simeq D^n$ et $f : S^{n-1} \to X$

Cor 4.4: a) Pour $n \geq 3$ on a $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$

b) Pour $n = 2$, $\pi_1(Y) = \pi_1(X) / N_f$ où $N_f \triangleleft \pi_1(X)$ est le sous-grp normal engendré par $[f : S^1 \to X] \in \pi_1(X)$.

c) Pour $n=1$, $\pi_1(Y) = \pi_1(X) * \mathbb{Z}$ si (X, x_0) est bien-pointé.

<u>Déf</u>: Un esp. (X, x_0) est <u>bien pointé</u> si x_0 admet un voisinage contractile par une homot. pointée.

<u>pf</u>: a) Par 4.3, car $\pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ pour $n \geq 3$.

b) Par 4.3, car $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ et $N_f = \mathrm{Im}(f_* : \mathbb{Z} \to \pi_1(X))$.

c) **Exercices.** $\square$

<u>Cor 4.5</u>: Pour tout groupe G il existe un esp. X t.q. $\pi_1(X) \simeq G$.

<u>pf</u>: Soit $\langle x_\alpha, \alpha \in I \mid r_\beta, \beta \in J \rangle \simeq G$ une présentation de G.

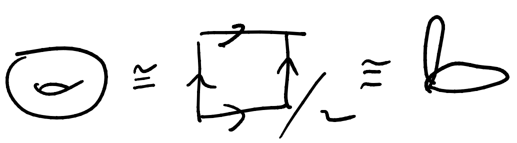
Considérons $X' = \bigvee_{\alpha \in I} S^1$ avec $\pi_1(X') \cong F(I)$.

Ensuite chaque $r_\beta = x_{\alpha_1}^{n_1} \cdots x_{\alpha_k}^{n_k}$ définit une appl. $f_\beta : S^1 \to X'$ en parcourant le $S^1 \subset X'$ qui corresp. à α_i, $n_i \in \mathbb{Z}$ fois.

$\overset{4.4b)}{\Longrightarrow} \pi_1(X' \cup_f e^2) = \pi_1(X')/N_f = \langle x_\alpha, \alpha \in I \mid r_\beta \rangle$.

En attachant une 2-cellule pour chaque $\beta \in J$ on obtient un X avec $\pi_1(X) \simeq G$ $\square$

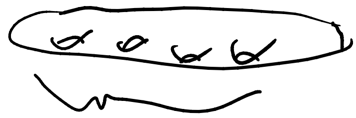
<u>Rmk</u>: Notre preuve marche pour $|J| < \infty$, mais on pourrait génér. 4.4 facilement pour obtenir le cas général.

<u>Expl</u>: $T =$  $\rightsquigarrow \pi_1(T) = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.

<u>Surfaces compactes orientées</u>:

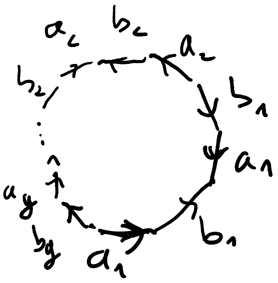
Surfaces compactes orientées:

On appelle une surface S une variété différentielle de dim. 2.

Si S est compacte et orientée, alors la classification des surfaces, nous dit que $S \cong S_g =$  pour un $g \geq 0$.

g-trous.

Prop 4.6: S_g est le quotient d'un $4g$-gon régulier où on identifie les côtés avec la même lettre en respectant les orientations:



En part. S_g est un complexe cellulaire

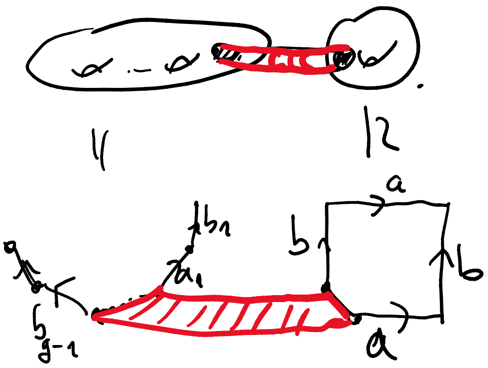
avec: une 0-cell.
$2g$ 1-cell.
une 2-cell.

Finalement on a $\pi_1(S_g) = \langle a_i, b_i, 1 \leq i \leq g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \rangle$ où

$$[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$$

pf: Ok pour $g = 0, 1$.

En générale on remarque que $S_g \cong S_{g-1} \# S_1$ (Somme connexe, ex 5.3).



Ceci donne le $4g$-gon par récurrence et la structure cellulaire.

Pour le π_1 on applique 4.4 b) à l'unique 2-cellule, qui est attachée à $S^1_{a_1} \vee S^1_{b_1} \vee \dots \vee S^1_{b_g}$ le long de $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 \dots b_g^{-1}$ $\square$